98-84493- 4

Wittstein, Theodor

Ueber die berechnung der ablösung von ...

Hannover

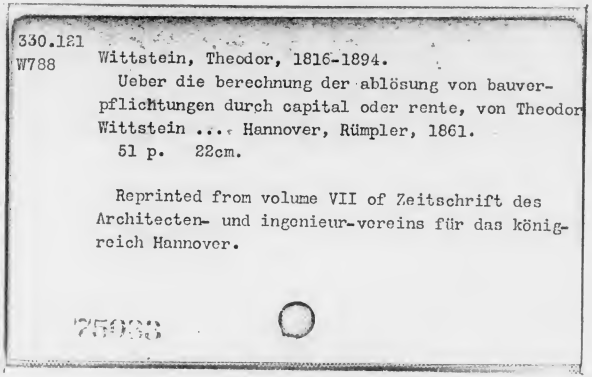
1861

98-84493-4
MASTER NEGATIVE #

COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES
PRESERVATION DIVISION

BIBLIOGRAPHIC MICROFORM TARGET

ORIGINAL MATERIAL AS FILMED -- EXISTING BIBLIOGRAPHIC RECORD



330.121
W788 Wittstein, Theodor, 1816-1894.
Ueber die berechnung der ablösung von bauverpflichtungen durch capital oder rente, von Theodor Wittstein .... Hannover, Rümpler, 1861.
51 p. 22cm.

Reprinted from volume VII of Zeitschrift des Architecten- und ingenieur-vereins für das königreich Hannover.

RESTRICTIONS ON USE: *Reproductions may not be made without permission from Columbia University Libraries.*

TECHNICAL MICROFORM DATA

FILM SIZE: 35 mm REDUCTION RATIO: // :1 IMAGE PLACEMENT: IA (IIA) IB IIB

DATE FILMED: 12/9/98 INITIALS: LL

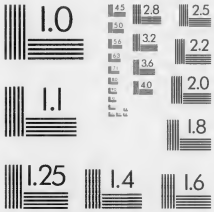
TRACKING #: 33638

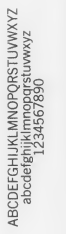
FILMED BY PRESERVATION RESOURCES, BETHLEHEM, PA.

PM-MGP
METRIC GENERAL PURPOSE TARGET
PHOTOGRAPHIC

150 mm

100 mm





1.0 mm

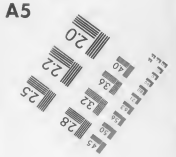
1.5 mm

2.0 mm

2.5 mm

A5

A4



PRECISION℠ RESOLUTION TARGETS

A & P International
612/854-0088 FAX 612/854-0482
8030 Old Cedar Ave. So., Ste. #215
Bloomington, MN 55425

330.121 — W788

330.121 W788
Columbia University
in the City of New York
LIBRARY

Ueber die

Berechnung

der

Ablösung von Bauerpflichtungen

durch Capital oder Rente,

von

Theodor Wittstein,
Dr. phil. und Professor

Hannover.
Carl Rümpler.
1861.

330.121
W788

March 2, 1922 - OTW

Vorwort.

Die Abhandlung, welche als besonderer Abdruck aus dem VII. Bande der Zeitschrift des Architecten- und Ingenieur-Vereins für das Königreich Hannover hier erscheint, ist vor einigen Jahren bei Gelegenheit einer Aufgabe entstanden, welche die Ablösung eines Bau-Complexes von beträchtlicher Größe zum Gegenstande hatte. Ich glaube diese Abhandlung einer größeren Verbreitung nicht vorenthalten zu dürfen, da sie in zwei Punkten wesentlich über den Standpunkt hinausführt, auf welchem Eytelwein die Sache verlassen hat, dem bisher alle anderen mir bekannten Schriftsteller über diesen Gegenstand gefolgt sind. Einmal dürfte hier zum ersten Male nachgewiesen sein, wie erheblich die Ablösung eines einzelnen Gebäudes von derjenigen eines größeren Bau-Complexes verschieden ist, und wie in dem letzten Falle Umstände hinzutreten, welche zu einer ganz anderen Berechnungsweise des

Ablösungscapitals oder der Ablösungsrente führen als im ersten Falle. Zweitens habe ich hier zur Berechnung der Baurente eines einzelnen Gebäudes ein vollkommen neues Princip aufgestellt, welches wesentlich auf der gleichzeitigen Anwendung mehrerer Zinsfuße beruht und welches, wie ich hoffe, unmittelbar aus der Natur der Sache seine Rechtfertigung finden wird. Ueberdies zeichnen die aus diesem Principe hervorgehenden Formeln sich hinreichend durch ihre Einfachheit aus, so daß die neue Methode wohl geeignet sein dürfte, die bisher viel verbreitete Berechnung nach s. g. Zwischenzinsen zu verdrängen, welche weder theoretisch zu rechtfertigen noch praktisch mehr als ein bloßer Nothbehelf sind.

Es erscheint kaum nöthig, hier noch ausdrücklich darauf hinzuweisen, wie der Inhalt dieser Abhandlung einer viel weiteren Anwendung fähig ist, als der Kürze wegen der Titel, so wie der Wortlaut des Textes solches anzeigen. Nicht nur kann die Bezeichnung „Bauverpflichtung“ auf Baulichkeiten im weitesten Sinne dieses Worts — also außer den eigentlichen Gebäuden, welche der Text nennt, auch auf Wasseranlagen, Wegebauten ꝛc. — ausgedehnt werden, sondern allgemein jede durch Capital abschätzbare Leistung oder Nutzung, welche in Perioden von einer Reihe von Jahren wiederkehrt, ist genau nach denselben Grund-

sätzen der Rechnung zu unterwerfen. Dahin gehören z. B. in der Forstwirthschaft sowohl die Bauholzverpflichtungen, als auch insbesondere die eigentliche Berechnung des Waldwerths, indem der Wald wie ein Complex von Beständen erscheint, von denen jeder seine eigene Nutzungsperiode hat; und insofern dürfte die vorliegende Arbeit vielleicht auch wie eine nicht unwillkommene Zugabe zu den betreffenden forstwissenschaftlichen Werken anzusehen sein.

Hannover, 1861.

Inhalt.

Seite

Erster Theil. Die bisherigen Methoden zur Berechnung der Ablösung von Bauverpflichtungen, und Folgerungen aus denselben 7
Erste Methode 8
Zweite Methode 11

Zweiter Theil. Neue Methode zur Berechnung der Ablösung von Bauverpflichtungen, und Anwendung derselben auf größere Baucomplexe 30
Dritte Methode 33

Erster Theil.

Die bisherigen Methoden zur Berechnung der Ablösung von Bauverpflichtungen, und Folgerungen aus denselben.

§. 1. Die hier zu behandelnde Aufgabe lautet vollständig:

> Jemand hat die Verpflichtung, für ewige Zeiten ein gewisses Gebäude, sobald es baufällig geworden ist, neu herstellen zu lassen. Er wünscht diese Verpflichtung abzulösen, sei es durch Capital, oder durch eine in ewige Zeiten fortlaufende und jährlich sich gleich bleibende Rente.

Gegeben sind:

das Baucapital, d. i. die zum jedesmaligen Neubau erforderliche Summe = a;

die Bauperiode, d. i. die zwischen je zwei Neubauten verfließende Anzahl Jahre = m;

der nächste Bautermin, d. i. die vom gegenwärtigen Augenblick bis zum nächsten Neubau verfließende Anzahl Jahre = r.

Gesucht wird:

entweder das Ablösungscapital = s;

oder die Ablösungsrente oder sogenannte Baurente $= b$.

Es ist sogleich klar, daß diese beiden Größen s und b unter sich in einem leicht übersehbaren Zusammenhange stehen. Nennt man nämlich q den Zinsfuß, zu welchem der Empfänger des Ablösungscapitals sein Geld anlegen kann, d. h. denjenigen Werth, zu welchem ein Capital $= 1$ in einem Jahre anwächst (z. B. bei 4 Procent würde $q = 1{,}04$ sein), so trägt ihm das Capital s für ewige Zeiten am Schlusse jedes Jahres eine Rente $= s \cdot (q - 1)$ ein. Eben so groß muß also die Ablösungsrente oder Baurente sein, oder man muß haben

1) $$s \cdot (q - 1) = b;$$

wobei vorausgesetzt wird, daß auch die Baurente b jeder Zeit nur am Schlusse des Jahres zahlbar gehalten werde.

Von den Reparaturkosten des Gebäudes wird hier und im Folgenden völlig abgesehen, oder es wird angenommen, daß die Ablösung derselben einer von der hier vorliegenden getrennten Betrachtung unterzogen werden muß.

Erste Methode.

§. 2. Die einfachste Methode zur Berechnung der Ablösung von Bauverpflichtungen geht von der Voraussetzung aus, daß der Empfänger des Ablösungscapitals oder der Ablösungsrente nicht im Stande sei, den jährlich einlaufenden Rentenbetrag — etwa weil derselbe für ein auszuleihendes Capital zu gering ist — verzinslich zu verwerthen, vielmehr sich darauf beschränkt sehe, die einzelnen Rentenbeträge durch einfache Ansammlung, ohne Zinsen, nach und nach zu dem Betrage der künftig benöthigten Baucapitale anwachsen zu lassen.

Die auf diese Voraussetzung gebaute Rechnung gestaltet sich am einfachsten, wenn der nächste Bautermin gleich der Bauperiode, d. i. wenn $r = m$ ist. Denn in diesem Falle liefert die Division des Baucapitals durch die Bauperiode unmittelbar die gesuchte Baurente. Oder es ist, wenn man die Baurente in diesem besondern Falle mit b_0 bezeichnet,

2) $$b_0 = \frac{a}{m};$$

und es ist sofort klar, daß eine mit diesem Betrage jährlich einlaufende Rente in einfacher Ansammlung, ohne Zinsen, nach je m Jahren genau das benöthigte Baucapital $= a$ liefern muß.

Wenn aber, wie es gewöhnlich der Fall sein wird, der nächste Bautermin kleiner als die Bauperiode, d. i. wenn $r < m$ ist, so wird keine für ewige Zeiten sich gleich bleibende Rente im Stande sein, in einfacher Ansammlung schon bis zum ersten Neubau das nöthige Baucapital $= a$ zusammenzubringen. Bezeichnet man allgemein wieder mit b die Baurente, deren Werth vorläufig unbekannt ist, so wird die Ansammlung der einlaufenden Baurente bis zum ersten Neubau nur den Werth br erreichen; mithin entsteht an dem zum ersten Neubau erforderlichen Baucapital a ein Ausfall

$$a - br,$$

welcher nicht anders als durch eine Anleihe gedeckt werden kann. Von dem Augenblicke des ersten Neubaues an wird also die weiter fortlaufende Rente aus folgenden beiden Theilen zu bestehen haben:

1) den Zinsen der beim ersten Neubau erforderlich gewesenen Anleihe $a - br$, welche zum Zinsfuße q betragen

$$(a - br)(q - 1);$$

2) der von da an für alle folgenden Neubauten, mit Ausnahme des ersten, erforderlichen Baurente, welche nach 2) den Werth hat

$$\frac{a}{m}.$$

Da nun die Baurente für ewige Zeiten dieselbe sein, also vor und nach dem ersten Neubau gleichen Werth haben soll, so erhält man durch Zusammenstellung des Vorigen die Bedingungsgleichung

$$b = (a - br)(q - 1) + \frac{a}{m},$$

woraus als Werth der gesuchten Baurente b sich ergiebt

3) $$b = \frac{a}{m} \cdot \frac{1 + m(q-1)}{1 + r(q-1)}.$$

Soll die Ablösung nicht durch Rente, sondern durch Capitalzahlung geschehen, so hat man mit Rücksicht auf 1) als Werth des gesuchten Ablösungscapitals

4) $$s = \frac{a}{m(q-1)} \cdot \frac{1 + m(q-1)}{1 + r(q-1)}.$$

Die Werthe von b und s fallen am kleinsten aus, wenn $r = m$, d. h. das abzulösende Gebäude so eben neugebaut worden ist. Diese Werthe sind

$$b = \frac{a}{m} \quad \text{und} \quad s = \frac{a}{m(q-1)},$$

von denen der erste mit 2) zusammenfällt.

Die Werthe von b und s werden dagegen am größten, wenn $r = 0$ ist, d. h. das Gebäude gerade jetzt neugebaut werden muß. Diese Werthe sind

$$b = \frac{a}{m} \cdot [1 + m(q-1)] \quad \text{und} \quad s = \frac{a}{m(q-1)} \cdot [1 + m(q-1)],$$

wofür man auch schreiben kann

$$b = \frac{a}{m} + a(q-1) \quad \text{und} \quad s = \frac{a}{m(q-1)} + a.$$

Der größte und der kleinste Werth von s unterscheiden sich hiernach von einander genau um den Betrag des Baucapitals a; der größte und der kleinste Werth von b dagegen um die einjährigen Zinsen des Baucapitals.

Beispiel. Es sei das Baucapital $a = 6000$ ℳ und die Bauperiode $m = 100$ Jahre; ferner betragen die landesüblichen Zinsen 4 Procent, also $q = 1{,}04$. Alsdann wird

1) für $r = 100$ Jahre
$b = 60$ ℳ
$s = 1500$ ℳ
2) für $r = 40$ Jahre
$b = 115{,}38$ ℳ
$s = 2884{,}6$ ℳ
3) für $r = 0$
$b = 300$ ℳ
$s = 7500$ ℳ.

Zweite Methode.

§. 3. Etwas schwieriger wird die Rechnung, wenn man die Voraussetzung fallen läßt, daß der Empfänger des Ablösungscapitals oder der Ablösungsrente nicht im Stande sei, die einlaufenden Rentenbeträge verzinslich zu verwerthen, wenn vielmehr eine Gelegenheit als vorhanden vorausgesetzt wird, um jeden Geldbetrag, er sei so klein er will, sofort als Capital verzinslich anlegen zu können. Man erhält auf solche Weise eine Verzinsung der Baurente nach dem Princip der Zinseszinsen. Daß diese Voraussetzung in der Wirklichkeit begründet ist, geht

aus dem Bestehen der Sparcassen hervor, in denen man jede noch so kleine Einlage mit Zins auf Zins kann anwachsen lassen: wenngleich allerdings der Zinsfuß, nach welchem Sparcassen rechnen, geringer als der landesübliche zu sein pflegt, worüber unten mehr.

Der einfachste Fall ist hier wieder derjenige, wo der nächste Bautermin gleich der Bauperiode, d. i. wo $r = m$ ist. In diesem Falle besteht das am Schlusse einer Bauperiode angesammelte Baucapital aus einer Summe von m Gliedern, welche einzeln die bis dahin mit Zinseszinsen angewachsenen Werthe der am Schlusse eines jeden Jahres einlaufenden Baurente darstellen. Oder es ist, wenn man wieder die Baurente in diesem Falle mit b_0 bezeichnet,

$$b_0 q^{m-1} + b_0 q^{m-2} + b_0 q^{m-3} + \ldots b_0 q + b_0 = a$$

d. i.

$$b_0 \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1} = a,$$

woraus folgt

5) $$b_0 = a \cdot \frac{q - 1}{q^m - 1}.$$

Wenn aber, wie gewöhnlich, der nächste Bautermin kleiner als die Bauperiode, d. i. $r < m$ ist, so wird keine für ewige Zeiten sich gleich bleibende Rente im Stande sein, mit Hinzurechnung von Zins auf Zins schon bis zum ersten Neubau das nöthige Baucapital $= a$ zusammenzubringen. Bezeichnet man allgemein wieder mit b die Baurente, deren Werth vorläufig unbekannt ist, so wird die Ansammlung der am Schlusse eines jeden Jahres einlaufenden Baurente, mit Einschluß von Zinseszinsen, bis zum ersten Neubau nur einen Werth erreichen, welcher durch die Summe dargestellt wird

$$b q^{r-1} + b q^{r-2} + b q^{r-3} + \ldots b q + b$$

d. i. kürzer durch

$$b \cdot \frac{q^r - 1}{q - 1}.$$

Mithin entsteht an dem zum ersten Neubau erforderlichen Baucapital a ein Ausfall

$$a - b \cdot \frac{q^r - 1}{q - 1},$$

welcher nicht anders als durch eine Anleihe gedeckt werden kann. Von dem Augenblicke des ersten Neubaues an wird also die weiter fortlaufende Rente aus folgenden beiden Theilen zu bestehen haben:

1) den Zinsen der beim ersten Neubau erforderlich gewesenen Anleihe $a - b \cdot \frac{q^r - 1}{q - 1}$, welche zum Zinsfuße q betragen

$$\left(a - b \cdot \frac{q^r - 1}{q - 1}\right)(q - 1),$$

d. i.

$$a(q - 1) - b(q^r - 1);$$

2) der von da an für alle folgenden Neubauten, mit Ausnahme des ersten, erforderlichen Baurente, welche nach 5) den Werth hat

$$a \cdot \frac{q - 1}{q^m - 1}.$$

Da nun die Baurente für ewige Zeiten dieselbe sein, also vor und nach dem ersten Neubau gleichen Werth haben soll, so erhält man durch Zusammenstellung des Obigen die Bedingungsgleichung

$$b = a(q - 1) - b(q^r - 1) + a \cdot \frac{q - 1}{q^m - 1},$$

woraus als Werth der gesuchten Baurente b sich ergiebt

$$6) \qquad b = a\,q^{m-r} \cdot \frac{q-1}{q^m-1}.$$

Soll die Ablösung nicht durch Rente, sondern durch Capitalzahlung geschehen, so hat man mit Rücksicht auf 1) als Werth des gesuchten Ablösungscapitals

$$7) \qquad s = \frac{a\,q^{m-r}}{q^m-1}.$$

Die Werthe von b und s fallen am kleinsten aus, wenn $r = m$, d. h. das abzulösende Gebäude so eben neugebaut worden ist. Diese Werthe sind

$$b = a \cdot \frac{q-1}{q^m-1} \quad \text{und} \quad s = \frac{a}{q^m-1}$$

von denen der erste mit 5) zusammenfällt.

Die Werthe von b und s werden dagegen am größten, wenn $r = 0$ ist, d. h. das Gebäude gerade jetzt neugebaut werden muß. Diese Werthe sind

$$b = a\,q^m \cdot \frac{q-1}{q^m-1} \quad \text{und} \quad s = \frac{a\,q^m}{q^m-1}$$

wofür man auch schreiben kann

$$b = a \cdot \frac{q-1}{q^m-1} + a\,(q-1) \quad \text{und} \quad s = \frac{a}{q^m-1} + a.$$

Der größte und der kleinste Werth von s unterscheiden sich hiernach von einander genau um den Betrag des Baucapitals a; der größte und der kleinste Werth von b dagegen um die einjährigen Zinsen des Baucapitals.

Beispiel. Es sei das Baucapital $a = 6000$ ℳ und die Bauperiode $m = 100$ Jahr. Ferner werde der Zinsfuß zu 4 Procent oder $q = 1{,}04$ angenommen. Alsdann wird

1) für $r = 100$ Jahre
$b = 4{,}85$ ℳ
$s = 121{,}2$ ℳ
2) für $r = 40$ Jahre
$b = 51{,}00$ ℳ
$s = 1275{,}0$ ℳ
3) für $r = 0$
$b = 244{,}85$ ℳ
$s = 6121{,}2$ ℳ.

Oder es werde der Zinsfuß zu 3 Procent d. h. $q = 1{,}03$ angenommen. Alsdann wird

1) für $r = 100$ Jahre
$b = 9{,}88$ ℳ
$s = 329{,}3$ ℳ
2) für $r = 40$ Jahre
$b = 58{,}21$ ℳ
$s = 1940{,}3$ ℳ
3) für $r = 0$
$b = 189{,}88$ ℳ
$s = 6329{,}3$ ℳ.

§. 4. Bevor wir weiter gehen, wollen wir unter den Resultaten der beiden bis hierher abgehandelten Methoden einige allgemeine Vergleichungen anstellen.

Unter dem mittleren Werthe der Baurente für ein gegebenes Gebäude wollen wir den Quotienten verstehen, welcher entsteht, wenn man für dieses Gebäude die Summe aller Werthe der Baurente von $r = 1$ bis $r = m$ durch die Anzahl dieser Werthe dividirt. Die Baurente für $r = 0$ schließen wir zu größerer Vereinfachung von dieser Betrachtung aus, da sie in der Praxis immer leicht vermieden, oder zum

wenigsten auf den Fall $r = m$ zurückgeführt werden kann. Nennt man w den mittleren Werth einer Baurente, so hat man nach üblicher Bezeichnungsweise

8) $$w = \frac{1}{m} \cdot \sum_{r=1}^{r=m} (b)$$

und es kommt mithin zur Bestimmung von w in jedem besondern Falle darauf an, die Summe

$$\sum_{r=1}^{r=m} (b)$$

zu berechnen. Diese Berechnung gestaltet sich in den vorigen beiden Methoden wie folgt.

Die erste Methode §. 2. hat in 3) ergeben

$$b = \frac{a}{m} \cdot \frac{1 + m(q-1)}{1 + r(q-1)}$$

und wenn man hierin für r nach und nach alle Werthe von $r = 1$ bis $r = m$ setzt und die entstehenden Werthe von b addirt, so folgt

9) $$\sum_{r=1}^{r=m} (b) = \frac{a}{m} \cdot \left(\frac{1 + m(q-1)}{1 + (q-1)} + \frac{1 + m(q-1)}{1 + 2(q-1)} + \frac{1 + m(q-1)}{1 + 3(q-1)} + \cdots \frac{1 + m(q-1)}{1 + m(q-1)} \right),$$

woraus in Verbindung mit 8) der gesuchte Werth von w hervorgeht.

Die in der Gleichung 9) in Klammern stehende Summe kann nicht in einen geschlossenen algebraischen Ausdruck zusammengefaßt werden*); dennoch reicht diese Form der Summe

*) Es ist dies die Summe einer harmonischen Progression „cas très-remarquable qui dans tous les tems a été regardé comme l'écueil de l'analyse.“ (Kramp, Arithmétique universelle, p. 368). Die Summe sei

schon hin, um aus ihr einige allgemeine Folgerungen zu ziehen. Man übersieht nämlich leicht, daß jeder der Brüche, aus denen diese Summe zusammengesetzt ist, mit alleiniger Ausnahme des letzteren, im Allgemeinen einen Werth besitzt, welcher größer als Eins ist; so wie ferner, daß die Werthe dieser Brüche zugleich mit dem Werthe von q zunehmen und abnehmen. Mithin ist die Summe selbst im Allgemeinen größer als m, und zwar desto größer, je größer q ist. Nur für $q = 1$, wo alle Brüche den Werth Eins annehmen, erhält die Summe den Werth m selbst.

Man hat also im Allgemeinen

10) $$\sum_{r=1}^{r=m} (b) > a$$

und

11) $$w > \frac{a}{m}$$

und kann folgenden allgemeinen Satz aufstellen:

Der mittlere Werth der Baurente für ein gegebenes Gebäude, den die erste Methode giebt, ist im Allgemeinen

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{a+2d} + \cdots \frac{1}{a+(n-1)d},$$

so kann man zur angenäherten Berechnung derselben die Formel gebrauchen

$$S = \frac{1}{d} \cdot \log \frac{a+nd}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+nd}\right) + \frac{d}{12}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+nd)^2}\right)$$

in welcher unter log der natürliche Logarithmus für die Basis 2,71828... verstanden werden muß. Diese Formel giebt, so lange $\frac{d}{a} < 0{,}1$ bleibt, das Resultat bis auf etwa 7 Decimalstellen genau, und diese Voraussetzung trifft in den hier vorliegenden Fällen in der Regel zu. Sollte sie nicht erfüllt sein, so addire man die ersten Glieder der Progression auf gewöhnliche Weise, bis man zu einem Gliede gelangt, von welchem angefangen wieder $\frac{d}{a} < 0{,}1$ ist.

größer als der Quotient der Division des Baucapitals durch die Bauperiode; und zwar desto größer, je höher der Zinsfuß der beim ersten Neubau nöthigen Anleihe angenommen wird.

Nur wenn die beim ersten Neubau nöthige Anleihe ohne Zinsen erhalten werden kann, so ist der mittlere Werth der Baurente gleich dem Quotienten der Division des Baucapitals durch die Bauperiode.

In dem obigen Beispiel, wo $a = 6000$ ℔ und $m = 100$ Jahre angenommen war, erhält man für $q = 1{,}04$, d. h. wenn die beim ersten Neubau nöthige Anleihe mit 4 Procent verzinst werden muß,

$$\sum_{r=1}^{r=m}(b) = 11952 \text{ ℔},$$

mithin beträgt der mittlere Werth der Baurente für dieses Gebäude

$$w = 119{,}52 \text{ ℔}.$$

Für $q = 1$ dagegen, d. h. ohne Verzinsung der beim ersten Neubau erforderlichen Anleihe, würde der mittlere Werth der Baurente nur

$$w = 60 \text{ ℔}$$

betragen haben.

§. 5. Zur Bestimmung des mittleren Werthes einer Baurente nach der zweiten Methode §. 3 hat man aus 6) die Formel

$$b = a\, q^{m-r} \cdot \frac{q-1}{q^m-1}$$

und wenn man hierin für r nach und nach alle Werthe von $r = 1$ bis $r = m$ setzt und die entstehenden Werthe von b

addirt, so folgt

$$\sum_{r=1}^{r=m}(b) = a\,(q^{m-1} + q^{m-2} + q^{m-3} + \ldots 1)\,\frac{q-1}{q^m-1}.$$

Nun ist

$$q^{m-1} + q^{m-2} + q^{m-3} + \ldots 1 = \frac{q^m-1}{q-1};$$

folglich hat man

12) $$\sum_{r=1}^{r=m}(b) = a$$

und

13) $$w = \frac{a}{m}$$

und kann mithin folgenden allgemeinen Satz aufstellen:

Der mittlere Werth der Baurente für ein gegebenes Gebäude, den die zweite Methode giebt, ist immer gleich dem Quotienten der Division des Baucapitals durch die Bauperiode, und vollkommen unabhängig von dem angenommenen Zinsfuße.

Zugleich ergiebt sich aus der Vergleichung dieses Paragraphen mit dem vorigen:

Die erste Methode liefert für ein gegebenes Gebäude im Allgemeinen immer einen größeren mittleren Werth der Baurente, als die zweite; und zwar wird der Unterschied desto größer, je höher in der ersten Methode der Zinsfuß der beim ersten Neubau nöthigen Anleihe angenommen wird.

Nur wenn in der ersten Methode die beim ersten Neubau nöthige Anleihe ohne Zinsen zu haben ist, so sind die mittleren Werthe der Baurente nach beiden Methoden gleich groß.

Endlich kann man aus der Vergleichung der Formeln 13) und 2) noch den Schluß ziehen:

> Der mittlere Werth der Baurente für ein gegebenes Gebäude, nach der zweiten Methode, ist gleich dem kleinsten Werthe der Baurente für dasselbe Gebäude, nach der ersten Methode.

In dem öfter gebrauchten Beispiele, $a = 6000$ ℳ und $m = 100$ Jahre, erhält man nach der zweiten Methode als mittleren Werth der Baurente, für jeden beliebigen Zinsfuß,

$$w = 60 \text{ ℳ};$$

während im vorigen Paragraphen nach der ersten Methode als mittlerer Werth der Baurente für dasselbe Gebäude, bei 4 Procent Zinsen, sich beinahe das Doppelte davon ergeben hat, nämlich $w = 119{,}52$ ℳ. Nur wenn für die beim ersten Neubau nöthige Anleihe keine Zinsen berechnet werden, so sinkt der mittlere Werth der Baurente auch nach der ersten Methode auf den Betrag $w = 60$ ℳ hinab, den die zweite Methode bei jedem Zinsfuße giebt.

§. 6. Der Begriff des mittleren Werthes einer Baurente, den wir im §. 4 aufgestellt haben, wird mit Einschluß der aus ihm gezogenen Folgerungen in ein noch helleres Licht treten, wenn wir ihn auf einen größeren Complex von Gebäuden anwenden, welche gleichzeitig abgelöst werden sollen. Die Gebäude dieses Complexes mögen sämmtlich einerlei Baucapital und einerlei Bauperiode haben, oder nicht; aber sie mögen sich wesentlich in den Werthen des nächsten Bautermins (§. 1) von einander unterscheiden.

Die Baurente für den vorhandenen Complex von Gebäuden wird offenbar gefunden werden, indem man die individuellen Baurenten der einzelnen Gebäude dieses Complexes addirt; oder

es ist, wenn man die Baurente für den gesammten Complex mit B bezeichnet,

14) $$B = \sum (b)$$

wo die durch $\sum$ angezeigte Summirung über alle vorhandenen Gebäude ausgedehnt werden muß. Nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist aber aus dem Begriffe des mittleren Werthes einer Baurente sofort klar, daß wenn man statt der individuellen Baurente für jedes Gebäude — den mittleren Werth der Baurente für dieses Gebäude an die Stelle setzt und alle diese mittleren Werthe addirt, d. h. wenn man statt der Formel 14) setzt

15) $$B = \sum (w),$$

der aus dieser Summirung hervorgehende Werth von B um so näher mit dem wahren Werthe, den die Formel 14) giebt, zusammenfallen wird, je größer die Anzahl von Gebäuden ist, welche der Complex umfaßt. Oder mit anderen Worten, die aus der Verschiedenheit der Werthe des nächsten Bautermins sich ergebende Differenz in den Werthen von B, welche die Formeln 14) und 15) liefern, wird um so mehr verschwinden, je größer die Mannigfaltigkeit in den gegebenen Werthen des nächsten Bautermins, d. h. je größer die Anzahl der vorliegenden Gebäude ist. Nun wird man allerdings, wenn man von dieser Bemerkung für irgend einen in der Wirklichkeit gegebenen Fall Anwendung machen und den unbekannten Werth von B aus den mittleren Werthen der Baurenten der einzelnen Gebäude des Complexes herleiten will, darauf gefaßt sein müssen, daß das Resultat der Rechnung noch um ein Merkliches von der Wahrheit sich entfernen werde, und man wird deshalb diese Rechnung nach den mittleren Werthen der Baurenten nur wie einen vorläufigen Ueberschlag ansehen dürfen,

dem eine genaue Rechnung nachfolgen muß. Aber es giebt Einen Fall, in welchem für einen Complex von Gebäuden die Rechnung nach den mittleren Werthen der Baurenten ein vollkommen genaues Resultat liefert, und diesen Fall wollen wir jetzt näher betrachten, zumal da aus ihm noch deutlicher die Richtigkeit der vorstehenden Schlüsse hervorleuchten wird.

§. 7. Es bestehe ein Complex aus m Gebäuden, von denen jedes ein Baucapital = a und eine Bauperiode = m erfordert. Diese Gebäude mögen genau in solcher Reihefolge baufällig werden, daß in jedem Jahre ein Neubau nöthig ist; und der erste bevorstehende Neubau sei derjenige, welcher nach einem Jahre eintreten muß. Man sucht für diesen Complex die Baurente.

Offenbar nimmt für diesen besondern Fall die Gleichung 14) die Gestalt von

16) $$B = \sum_{r=1}^{r=m} (b)$$

und die Gleichung 15) verwandelt sich, da der mittlere Werth der Baurente für alle Gebäude dieses Complexes gleich groß ist, in

17) $$B = m\,w.$$

Nimmt man nun aus der Gleichung 8), welche die Definition von w ausspricht, den Werth von w, nämlich

$$w = \frac{1}{m} \cdot \sum_{r=1}^{r=m} (b)$$

und setzt ihn in 17), so geht diese Gleichung genau in 16) über. Mithin sind die Gleichungen 16) und 17) genau identisch, und es ist für den Erfolg vollkommen einerlei, welche von beiden man zur Berechnung von B anwenden will.

Nimmt man z. B. den mehrfach benutzten Fall wieder auf, wo a = 6000 ℔ und m = 100 Jahre ist, und denkt sich einen Complex von 100 solchen Gebäuden, von denen, mit dem nächsten Jahre angefangen, in jedem Jahre eines neugebaut werden muß, so kann man zur Bestimmung der Baurente dieses Complexes verfahren wie folgt:

1) Nach der ersten Methode hat man aus §. 4 für q = 1,04, d. h. wenn die beim ersten Neubau nöthige Anleihe mit 4 Procent verzinst werden muß,

$$w = 119{,}52\ ℔;$$

mithin beträgt die Baurente für den gesammten Complex von Gebäuden

$$B = 11952\ ℔.$$

Für q = 1 dagegen, d. h. ohne Verzinsung der beim ersten Neubau nöthigen Anleihe, würde man nur haben

$$w = 60\ ℔,$$

und mithin

$$B = 6000\ ℔.$$

2) Nach der zweiten Methode hat man aus §. 5 für jeden beliebigen Zinsfuß

$$w = 60\ ℔,$$

mithin als Betrag der Baurente für den gesammten Complex von Gebäuden

$$B = 6000\ ℔.$$

Wir können den hier betrachteten besondern Fall noch weiter verallgemeinern, indem wir uns einen Complex von Gebäuden denken, welcher aus mehreren Gruppen von Gebäuden besteht, in deren jeder die Voraussetzungen des obigen besondern Falles erfüllt sind. Alsdann gelten für die Auffindung der Baurenten dieser einzelnen Gruppen völlig die

obigen Schlüsse; folglich sind dieselben Schlüsse auch auf die Summe dieser Baurenten, d. i. auf die Baurente des ganzen Complexes anwendbar, oder es ist für den Erfolg vollkommen einerlei, ob man die Baurente des Complexes durch Summirung der individuellen Baurenten der einzelnen Gebäude, oder ob man sie durch Summirung der mittleren Werthe der Baurenten dieser Gebäude herleiten will.

Der oben betrachtete besondere Fall, so wie die so eben angezeigte Erweiterung desselben werden in der Wirklichkeit allerdings so gut wie niemals vorkommen, oder die Wahrscheinlichkeit eines jeden derselben ist unendlich klein. Aber nach den Grundgesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden alle durch die Wirklichkeit dargebotenen Complexe von Gebäuden um einen jener Fälle wie um eine Mitte oscilliren, und sie werden dieser Mitte desto näher kommen, je größer die Anzahl der Gebäude und je größer in diesen die Mannigfaltigkeit in den Werthen des nächsten Bautermins ist. Wir kommen also hier wieder auf den schon im vorigen Paragraphen angezeigten Schluß zurück:

> daß bei einem größeren Complex von Gebäuden die Summirung der mittleren Werthe der Baurenten der einzelnen Gebäude immer einen mehr oder weniger zulässigen Näherungswerth für die Baurente des ganzen Complexes liefert.

Will man ein Kriterium für die Zulässigkeit des also gefundenen Näherungswerthes haben, so ordne man die Werthe des Bruches $\frac{r}{m}$, welche den einzelnen Gebäuden entsprechen, nach ihrer Größe, und untersuche, ob sie das Intervall zwischen 0 und 1 möglichst gleichförmig, d. h. ohne besonders hervor-

tretende Sprünge oder Lücken ausfüllen. Je mehr dieses der Fall ist, desto mehr darf man den gefundenen Näherungswerth als der Wahrheit nahe kommend ansehen. Den Grund davon wird man leicht aus dem Obigen erkennen.

§. 8. Der im vorigen Paragraphen behandelte besondere Fall bietet die bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit dar, daß in ihm der Betrag der zur Ablösung der Bauverpflichtung erforderlichen Baurente sich vor aller Rechnung angeben läßt. Denn es ist unmittelbar klar, daß wenn alljährlich, vom nächsten Jahre angefangen, ein Baucapital $= a$ vorhanden sein soll, die Baurente zur Ablösung dieser Verpflichtung ebenfalls den Betrag $= a$ haben muß. Vergleicht man dieses Ergebniß mit demjenigen, was die erste und zweite Methode für diesen besondern Fall liefern, so erhält man damit ein sehr beachtenswerthes Kriterium, um a posteriori die Güte dieser beiden Methoden zu prüfen.

Nach der ersten Methode erhält man durch Combinirung der beiden Formeln 16) und 10), oder 17) und 11), als Betrag der Baurente für den vorliegenden Complex

$$B > a,$$

und zwar wird dieser Werth von B desto größer, je höher der Zinsfuß der beim ersten Neubau eines jeden Gebäudes nöthigen Anleihe angenommen wird. Nur wenn die bei jedem ersten Neubau nöthige Anleihe ohne Zinsen erhalten werden kann, so sinkt die Baurente auf den Betrag $B = a$ hinab.

Nach der zweiten Methode dagegen erhält man durch Combinirung der beiden Formeln 16) und 12), oder 17) und 13), als Betrag der Baurente für denselben Complex

$$B = a,$$

unabhängig von jedem Zinsfuß.

So z. B. hat im vorigen Paragraphen für $a = 6000$ ℳ und $m = 100$ Jahre nach der ersten Methode sich ergeben

$$B = 11952 \text{ ℳ}$$

für einen Zinsfuß von 4 Procent bei den nöthigen Anleihen. Dagegen nach der zweiten Methode

$$B = 6000 \text{ ℳ}$$

für jeden beliebigen Zinsfuß.

Hier ist sofort der Widerspruch sichtbar, in welchen die erste Methode verfällt, indem sie eine Baurente weit über den Bedarf liefert, während die zweite Methode genau den vorkommenden Bedarf deckt. Ferner ist das Ergebniß der ersten Methode noch überdies abhängig vom Zinsfuße, mit welchem es steigt und fällt; in der zweiten Methode dagegen ist der Zinsfuß, wie es sein soll, aus der Rechnung ausgefallen. Die Widersprüche, in welche hiernach die erste Methode sich verwickelt, haben aber ihren Grund in dieser Methode selbst und lassen sich in dem Gange derselben zweifellos nachweisen, wie folgt.

Wenn man sich die Casse, in welche die Baurente B fließt, in m einzelne Cassen zerlegt denkt, von denen jede die individuelle Baurente eines der obigen m Gebäude aufzunehmen bestimmt ist, so gelten zwar für die Feststellung der Werthe dieser Baurenten der Hauptsache nach wieder dieselben Schlüsse, welche für die erste Methode im §. 2 und für die zweite Methode im §. 3 entwickelt worden sind. Aber es tritt ein Unterschied ein, sobald irgend ein erster Neubau die betreffende Casse zu einer Anleihe nöthigt. Denn da alle diese Cassen sich in Einer Hand befinden, so ist man nicht mehr gezwungen wegen dieser Anleihe sich nach auswärts zu wenden und daselbst sich einen Zinsfuß vorschreiben zu lassen;

sondern man wird den Betrag dieser Anleihe sofort aus den übrigen Cassen entnehmen, welche in dem hier vorliegenden Falle immer dazu im Stande sind. Nun entsteht an dieser Stelle in der ersten Methode sofort ein Widerspruch: dieselbe Summe, welche als auszuleihende Summe, der Voraussetzung nach, keine Zinsen tragen soll, wird als anzuleihende Summe zu einem Zinsfuße q verzinslich in Rechnung gebracht, und es ist demnach nicht zu verwundern, wenn dieser Widerspruch die obigen weiteren Widersprüche zur Folge haben konnte. Dagegen in der zweiten Methode stellt sich die Sache anders: derselbe Zinsfuß q, zu welchem eine Summe als auszuleihende Summe, der Voraussetzung nach, verzinst werden soll, wird bei ihr auch als einer anzuleihenden Summe in Rechnung gebracht, genau so als ob Jemand bei sich selbst eine Anleihe macht und für dieselbe Zinsen berechnet und bezahlt; eine überflüssige und zugleich vollkommen unschädliche Operation, wie sich auch sogleich im Erfolge dadurch zeigt, daß der Zinsfuß aus dem Resultate der Rechnung ganz herausfällt.

Der hier besprochene besondere Fall kommt allerdings in der Wirklichkeit so gut wie niemals vor, sondern jeder wirklich vorhandene Complex von Gebäuden wird, wie im vorigen Paragraphen gezeigt worden ist, sich ihm nur mehr oder weniger annähern. Es kann also in der Wirklichkeit sehr wohl eintreten, daß hin und wieder, wenn das Bedürfniß eines ersten Neubaues vorliegt, die Cassenbestände aller einzelnen Cassen zusammengenommen zur Deckung der Bausumme nicht ausreichen, und mithin zu einer Anleihe von auswärts zu vorgeschriebenem Zinsfuße geschritten werden muß. Indessen da jeder Complex von Gebäuden, je größer er ist, im Allge-

meinen auch desto mehr dem vorbezeichneten idealen Falle näher kommt, so kann man allgemein den Satz aussprechen:

> daß für größere Complexe von Gebäuden die erste Methode vollkommen unrichtige, nämlich zu hohe Baurenten liefert; falls nicht etwa die bei jedem ersten Neubau nöthige Anleihe als zinsenfrei in Rechnung gebracht wird.

In der letzteren Voraussetzung aber fällt das Ergebniß der ersten Methode mit demjenigen der zweiten zusammen, welche man nach dem Bisherigen für größere Complexe schon als approximativ zulässig ansehen wird. Doch bedarf auch die zweite Methode für jeden in der Wirklichkeit gegebenen Complex von Gebäuden noch einer Modification, auf welche wir weiter unten (§. 15) zurückkommen werden, wo wir die Betrachtung der Complexe, die wir hier verlassen, zum zweiten Male aufnehmen.

§. 9. Es würde sehr irrig sein, wenn man diese letzten Schlüsse auf die Bestimmung der Baurente eines einzelnen Gebäudes, oder auch nur eines kleinen Complexes von Gebäuden ausdehnen wollte; vielmehr kann eine Entscheidung über die Güte der ersten und zweiten Methode für diese Fälle nur aus der inneren Natur der Methode selbst entnommen werden.

In den §§. 4 und 5 hat sich gezeigt, daß der mittlere Werth der Baurente für ein gegebenes Gebäude nach der ersten Methode im Allgemeinen und bei gewöhnlichen Zinsfüßen merklich höher ausfällt als nach der zweiten Methode; insbesondere ergab sich in einem dort berechneten Beispiele nach der ersten Methode nahe das Doppelte von dem mittleren Werthe der Baurente nach der zweiten Methode. Dies hat in den beiden Methoden selbst seine nachweisbaren Ur-

sachen. Die erste Methode gesteht dem Empfänger der Rente einen zu großen Vortheil zu. Sie setzt voraus, daß er die einzelnen Rentenbeträge nicht verzinslich verwerthen könne, während er dennoch, zum mindesten nachdem sich größere Capitalien angesammelt haben, dieselben ausleihen und sich damit einen Gewinn verschaffen kann, welcher außerhalb der Rechnung liegt. Die zweite Methode dagegen setzt den Empfänger der Rente zu sehr in Nachtheil. Sie fordert von ihm, daß er die einzeln einlaufenden Rentenbeträge mit Zinseszinsen verwerthe, wozu er vielleicht nicht immer, wenigstens nicht zu dem vorgeschriebenen Zinsfuße, im Stande sein wird. Die beiden Methoden gehen also von Voraussetzungen aus, welche in der Wirklichkeit so gut wie niemals erfüllt sind, und ihre Resultate stellen nichts anderes als zwei Extreme dar, von denen man nur das aussagen kann, daß die Wahrheit zwischen ihnen liegt.

Diese Erwägungen haben schon längst den Anlaß gegeben, nach einer Methode zu suchen, welche den Anforderungen der Wirklichkeit näher kommt. Eine solche Methode hat unseres Wissens zuerst Eytelwein*) aufgestellt, Wolff**) hat von ihr Gebrauch gemacht, und neuerlich hat Hoffmann***) Hülfstafeln für dieselbe berechnet. Sie beruhet auf dem Princip der sogenannten Zwischenzinsen, d. h. auf der Voraussetzung, daß die einlaufenden Rentenbeträge noch einmal als Zinsen tragend angesehen, diese Zinsen selbst aber nicht

*) Eytelwein, Anleitung zur Ermittelung der Dauer und Unterhaltungskosten der Gebäude ꝛc. Berlin 1831.

**) Wolff, Technische Entwickelung der Grundsätze zur Abschätzung von Stadtgebäuden ꝛc. Berlin 184?

***) Hoffmann, Tabellen der Renten als aliquoter Theile einer erforderlichen Bausumme ꝛc. Berlin 1857.

weiter verzinslich angelegt werden können. Dieses Princip erscheint aber sehr willkürlich aufgegriffen und wenig der Natur der Sache angemessen. In der That weiß Eytelwein zur Empfehlung desselben kaum mehr zu sagen, als daß die aus ihm gezogenen Resultate sich zwischen denen der beiden obigen Methoden halten; und wenn Hoffmann das Princip durch die Annahme zu stützen sucht, daß die einfachen Zinsen der Rentenbeträge zur Verbesserung des Bauwerks verwandt werden können und damit aufhören eisernes Capital zu sein, so vermischt er damit zwei Dinge, nämlich die Baurente für Neubauten und die Baurente für Reparaturen, welche in Rechnungen dieser Art strenge gesondert bleiben müssen. Ueberdies empfehlen sich die hervorgehenden Formeln keineswegs durch Einfachheit, wegen deren man sie etwa zur Bestimmung angenäherter Werthe beibehalten möchte. Aus allen diesen Gründen werden wir uns hier auf dieses Princip nicht weiter einlassen, zumal wir eine neue Methode in Vorschlag zu bringen haben, welche, wie es uns scheint, der Natur der Sache besser entspricht.

Zweiter Theil.

Neue Methode zur Berechnung der Ablösung von Bauverpflichtungen, und Anwendung derselben auf größere Baucomplexe.

§. 10. Wir kehren wieder zu der Voraussetzung des §. 3 zurück, daß der Empfänger des Ablösungscapitals oder der Ablösungsrente sowohl die einlaufenden Rentenbeträge, als überhaupt jeden noch so kleinen Geldbetrag verzinslich zu

verwerthen im Stande sei, mithin eine Verzinsung der Baurente nach dem Princip der Zinseszinsen stattfinden soll. Diese Voraussetzung ist durch das Bestehen der gegenwärtig fast überall verbreiteten Sparcassen, in denen man jede noch so kleine Einlage mit Zins auf Zins kann anwachsen lassen, vollkommen gerechtfertigt; nur muß man hier mit einem geringeren Zinsfuße als dem landesüblichen sich begnügen. Die Sparcassen berechnen die Zinsen für ihre Einlagen in der Regel nicht höher als zu $2\frac{1}{2}$ bis 3 Procent*); wenn aber diese Einlagen durch den Zinsenanwachs, so wie durch Nachschüsse, der Sparcasse entwachsen sind, so können sie als Capitalien immer schon zu einem höheren Zinsfuße untergebracht werden. Wir glauben deshalb nicht fehl zu gehen, wenn wir im Durchschnitt den Zinsfuß von 3 Procent als denjenigen annehmen, zu welchem der Empfänger einer Ablösungsrente im Stande sein wird, die bei ihm einlaufenden Rentenbeträge mit Zins auf Zins zu verwerthen; wobei wir jedoch nicht als ausgeschlossen ansehen wollen, daß man unter Umständen, zumal bei kleineren Ablösungen, genöthigt sein kann bis zu $2\frac{1}{2}$ Procent oder selbst 2 Procent hinabzugehen.

Wenn dagegen der Empfänger der Rente in den Fall

*) Uns ist nur Ein Beispiel bekannt, wo eine Sparcasse mehr als 3 Procent rechnet: die Sparcasse zu Harburg hat im December 1857 ihren Zinsfuß von 3 auf $3\frac{1}{2}$ Procent erhöht. Die Sparcasse zu Hannover zahlte noch vor einigen Jahren vom Thaler 6 Pfennig, d. i. $2\frac{1}{12}$ Procent; unmittelbar vor Eintritt des neuen Münzsystems zahlte sie vom Thaler 8 Pfennig, d. i. $2\frac{7}{9}$ Procent, welcher Zinsfuß auch mit dem Eintritt des neuen Münzsystems keine Aenderung erfahren zu haben scheint. Uebrigens bemerken wir ausdrücklich, daß wir nur solche Sparcassen im Sinne haben, welche eine Verzinsung mit Zinseszinsen zulassen, falls es auch andere geben sollte. Man sehe: Bening, die Spar- und Sterbecassen im Königreich Hannover. Hannover 1840.

kommt zum ersten Neubau des abzulösenden Gebäudes zu schreiten, und zu dem Ende sich genöthigt sieht eine Anleihe zu machen, so wird er diese Anleihe in der Regel nicht mehr zu dem vorbezeichneten niedrigen Zinsfuße haben können, sondern er wird dafür die landesüblichen Zinsen, d. i. mindestens 4 Procent, zahlen müssen. Wir werden also durch die Natur der Sache gezwungen, an dieser Stelle einen zweiten Zinsfuß, höher als den vorigen, in die Rechnung aufzunehmen. Ja, wenn überdies der landesübliche Zinsfuß kein fest bestimmter ist, sondern zwischen zwei gegebenen Grenzen schwankt, so wird man zur Verzinsung der in Rede stehenden Anleihe die obere Grenze des landesüblichen Zinsfußes, welche 5 Procent oder darüber betragen kann, in Rechnung bringen müssen, wenn man sicher gehen will, daß dem Empfänger der Rente mit dieser Verzinsung kein Schaden erwachsen soll.

Will man endlich die Ablösungsrente auf ein Ablösungscapital zurückführen, so wird man in den Fall kommen zum Behufe dieser Reduction einen dritten Zinsfuß in die Rechnung einführen zu müssen. Zwar ist ein Ablösungscapital ohne Zweifel immer groß genug, um ohne Weiteres eine Verwandlung in ewige Rente zu dem landesüblichen Zinsfuße zuzulassen. Wenn aber der landesübliche Zinsfuß kein fest bestimmter ist, sondern zwischen zwei gegebenen Grenzen schwankt, so wird man, damit der Empfänger des Ablösungscapitals nicht zu Schaden kommt, zur Verwandlung der Rente in Capital die untere Grenze des landesüblichen Zinsfußes in Rechnung zu bringen haben.

Die Trennung dieser zwei oder drei hier bezeichneten Zinsfuße ist es nun, welche, nach unserem Dafürhalten, den einzigen rationellen Weg vorzeichnet, auf dem man die Berechnung der Ablösung einer Bauverpflichtung so genau, wie Rechnungen dieser Art überall zu leisten sind, ausführen kann. Die Unterlassung dieser Trennung ist, meinen wir, der hauptsächlichste Grund gewesen, weshalb die Resultate der ersten und zweiten Methode dem Praktiker so wenig zusagen wollen. Man mag immerhin in wirklichen Beispielen die obigen Zinsfuße bis an ihre äußersten Grenzen resp. erniedrigen oder erhöhen, damit nach Möglichkeit der Empfänger des Ablösungscapitals oder der Ablösungsrente sicher geht; aber man wird niemals mit einem einzigen Zinsfuße im Stande sein, bei der Ablösung eines einzelnen Gebäudes oder eines kleinen Complexes von Gebäuden ein der Wahrheit nur einigermaßen nahe kommendes Resultat zu erzielen. Wir werden deshalb auf der Grundlage der vorbezeichneten Trennung der Zinsfuße hier eine neue Rechnungsmethode entwickeln, die wir zur Abkürzung als dritte Methode bezeichnen wollen.

Dritte Methode.

§. 11. Es sei

q der Zinsfuß, zu welchem die Baurente mit Zinseszinsen verwerthet werden kann;

q' der Zinsfuß, zu welchem die beim ersten Neubau nöthige Anleihe verzinst werden muß;

q'' der Zinsfuß, zu welchem die Baurente auf Capital zu reduciren ist.

Mit Benutzung dieser drei Zinsfuße folgen wir nun genau dem Entwickelungsgange der §§. 2 und 3, den wir dort nicht ohne Absicht so gewählt haben, daß wir im gegenwärtigen Falle uns ihm wieder anschließen können.

Der einfachste Fall zur Bestimmung der Baurente ist wieder derjenige, wo der nächste Bautermin gleich der Bauperiode, d. h. wo $r = m$ ist. In diesem Falle bleiben die Schlüsse des §. 3 unverändert bestehen. Es setzt sich nämlich das am Schlusse einer Bauperiode angesammelte Baucapital aus einer Summe von m Gliedern zusammen, welche einzeln die bis dahin mit Zinseszinsen angewachsenen Werthe der am Schlusse eines jeden Jahres einlaufenden Baurente darstellen. Oder es ist, wenn man die Baurente in diesem besondern Falle mit b_0 bezeichnet,

$$b_0 q^{m-1} + b_0 q^{m-2} + b_0 q^{m-3} + \ldots b_0 q + b_0 = a$$

d. i.

$$b_0 \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1} = a,$$

woraus folgt

18) $$b_0 = a \cdot \frac{q - 1}{q^m - 1},$$

welche Formel mit 5) zusammenfällt.

Wenn aber, wie gewöhnlich, der nächste Bautermin kleiner als die Bauperiode, d. i. wenn $r < m$ ist, so wird keine für ewige Zeiten sich gleich bleibende Rente im Stande sein, mit Hinzurechnung von Zins auf Zins schon bis zum ersten Neubau das nöthige Baucapital $= a$ zusammenzubringen, sondern vielmehr die Ansammlung der am Schlusse eines jeden Jahres einlaufenden und vorläufig unbekannten Baurente b, mit Einschluß von Zinseszinsen, bis zum ersten Neubau nur einen Werth erreichen, welcher durch die Summe dargestellt wird

$$b q^{r-1} + b q^{r-2} + b q^{r-3} + \ldots b q + b$$

d. i. kürzer durch

$$b \cdot \frac{q^r - 1}{q - 1}.$$

Mithin entsteht an dem zum ersten Neubau erforderlichen Baucapital a ein Ausfall

$$a - b \cdot \frac{q^r - 1}{q - 1},$$

welcher nicht anders als durch eine Anleihe gedeckt werden kann. Von dem Augenblick des ersten Neubaues an wird also die weiter fortlaufende Rente aus folgenden beiden Theilen zu bestehen haben:

1) den Zinsen der beim ersten Neubau erforderlich gewesenen Anleihe $a - b \cdot \frac{q^r - 1}{q - 1}$, welche zum Zinsfuße q' betragen

$$\left(a - b \cdot \frac{q^r - 1}{q - 1}\right)(q' - 1)$$

d. i.

$$a(q' - 1) - b \cdot \frac{q^r - 1}{q - 1}(q' - 1);$$

2) der von da an für alle folgenden Neubauten, mit Ausnahme des ersten, erforderlichen Baurente, welche nach 18) den Werth hat

$$a \cdot \frac{q - 1}{q^m - 1}.$$

Da nun die Baurente für ewige Zeiten dieselbe sein, also vor und nach dem ersten Neubau gleichen Werth haben soll, so erhält man aus dem Vorigen die Bedingungsgleichung

$$b = a(q' - 1) - b \cdot \frac{q^r - 1}{q - 1}(q' - 1) + a \cdot \frac{q - 1}{q^m - 1},$$

woraus als Werth der gesuchten Baurente b sich ergiebt

19) $$b = a \cdot \frac{q - 1 + (q^m - 1)(q' - 1)}{q - 1 + (q^r - 1)(q' - 1)} \cdot \frac{q - 1}{q^m - 1}.$$

Soll die Ablösung nicht durch Rente, sondern durch Capitalzahlung geschehen, so hat man mit dem Zinsfuße q'' als Werth des gesuchten Ablösungscapitals

$$20)\quad s = \frac{a}{q''-1} \cdot \frac{q-1+(q^m-1)(q'-1)}{q-1+(q^r-1)(q'-1)} \cdot \frac{q-1}{q^m-1}.$$

Die Werthe von b und s fallen am kleinsten aus, wenn $r = m$, d. h. das abzulösende Gebäude so eben neugebaut worden ist. Diese Werthe sind

$$b = a \cdot \frac{q-1}{q^m-1} \quad \text{und} \quad s = \frac{a}{q''-1} \cdot \frac{q-1}{q^m-1},$$

von denen der erste mit 18) zusammenfällt.

Die Werthe von b und s werden dagegen am größten, wenn $r = 0$ ist, d. h. das Gebäude gerade jetzt neugebaut werden muß. Diese Werthe sind

$$b = a \cdot \frac{q-1+(q^m-1)(q'-1)}{q^m-1}$$

$$\text{und } s = \frac{a}{q''-1} \cdot \frac{q-1+(q^m-1)(q'-1)}{q^m-1},$$

wofür man auch schreiben kann

$$b = a \cdot \frac{q-1}{q^m-1} + a\,(q'-1)$$

$$\text{und } s = \frac{a}{q''-1} \cdot \frac{q-1}{q^m-1} + a \cdot \frac{q'-1}{q''-1}.$$

Der größte und der kleinste Werth von s unterscheiden sich hiernach von einander um einen Betrag $a \cdot \frac{q'-1}{q''-1}$, welcher im Allgemeinen größer als a ist und nur dann mit dem Baucapital a zusammenfällt, wenn $q' = q''$ angenommen wird. Der größte und der kleinste Werth von b dagegen unterscheiden sich von einander genau um die einjährigen Zinsen des Baucapitals a zum Zinsfuße q'.

Beispiel. Es sei das Baucapital $a = 6000$ ℳ und die Bauperiode $m = 100$ Jahre. Ferner werde $q = 1{,}03$ und $q' = q'' = 1{,}04$ angenommen. Alsdann wird

1) für $r = 100$ Jahre
   $b = 9{,}88$ ℳ
   $s = 247{,}0$ ℳ
2) für $r = 40$ Jahre
   $b = 62{,}22$ ℳ
   $s = 1555{,}5$ ℳ
3) für $r = 0$
   $b = 249{,}88$ ℳ
   $s = 6247{,}0$ ℳ.

Oder es werde $q = 1{,}03$, $q' = 1{,}05$ und $q'' = 1{,}04$ angenommen. Alsdann erhält man

1) für $r = 100$ Jahre
   $b = 9{,}88$ ℳ
   $s = 247{,}0$ ℳ
2) für $r = 40$ Jahre
   $b = 64{,}96$ ℳ
   $s = 1624{,}0$ ℳ
3) für $r = 0$
   $b = 309{,}88$ ℳ
   $s = 7747{,}0$ ℳ.

Man könnte ferner q bis 1,02 hinabgehen und q' bis 1,06 steigen lassen, während $q'' = 1{,}04$ ungeändert bleibt. Doch wollen wir die Berechnung von Zahlenbeispielen hier nicht weiter verfolgen. (S. die Tabelle am Schluß.)

§. 12. Die hier entwickelte dritte Methode hat die besondere Eigenschaft, daß sie sowohl die erste als auch die zweite

Methode als besondere Fälle unter sich enthält. Dies läßt sich leicht zeigen wie folgt:

1) Man erhält die erste Methode, wenn man im vorigen Paragraphen $q = 1$ und $q' = q''$ setzt. In der That gehen durch die Substitution dieser Werthe die Formeln 19) und 20) resp. in 3) und 4) über, wobei man, um die Form $\frac{0}{0}$ zu vermeiden, genöthigt ist von einer bekannten Regel der Differentialrechnung Gebrauch zu machen.

2) Man erhält die zweite Methode, wenn man im vorigen Paragraphen $q = q' = q''$ setzt. In der That verwandeln sich durch diese Annahme die Formeln 19) und 20) unmittelbar resp. in 6) und 7).

Die erste und die zweite Methode dagegen können nicht die eine als besonderer Fall der andern angesehen werden. Sie enthalten nur gemeinschaftlich einen und denselben besondern Fall unter sich; denn setzt man $q = 1$ in den Formeln 3) und 6), so fallen die Werthe, welche diese beiden Formeln geben, zusammen, wobei man in der zweiten Formel wieder von der oben erwähnten Regel der Differentialrechnung Anwendung zu machen hat.

Nach dem oben Gesagten müssen also alle Eigenschaften der dritten Methode, mit den nöthigen Modificationen, auch bei der ersten und der zweiten Methode sich wiederfinden. Wir werden jedoch in dem Folgenden, der Kürze wegen, hierauf nicht besonders Rücksicht nehmen, sondern wie bisher die erste und zweite Methode als vollkommen selbstständig und als verschieden von der dritten Methode ansehen.

Mit Festhaltung dieser Verschiedenheit sind wir der Ansicht, daß unsere dritte Methode als die einzig richtige und

zulässige zur Berechnung der Ablösung von einzelnen Gebäuden angesehen werden müsse. Wie aber die Anwendung dieser Methode auf Complexe von Gebäuden sich gestaltet, das steht uns jetzt noch zu untersuchen bevor.

§. 13. Wenn man in der dritten Methode den mittleren Werth der Baurente für ein gegebenes Gebäude bestimmen will, welcher durch die Gleichung 8) nämlich

$$w = \frac{1}{m} \cdot \sum_{r=1}^{r=m} (b)$$

definirt wird, so hat man aus 19)

$$b = a \cdot \frac{q-1+(q^m-1)(q'-1)}{q-1+(q^r-1)(q'-1)} \cdot \frac{q-1}{q^m-1};$$

oder für den gegenwärtigen Zweck einfacher

$$b = a \cdot \frac{q^m(q'-1)+q-q'}{q^r(q'-1)+q-q'} \cdot \frac{q-1}{q^m-1};$$

oder endlich, wenn man setzt

$$21) \qquad \frac{q'-q}{q'-1} = \alpha,$$

wo die Hülfsgröße α in allen Fällen, welche der dritten Methode eigenthümlich angehören, ein positiver echter Bruch sein wird,

$$22) \qquad b = a \cdot \frac{q^m-\alpha}{q^r-\alpha} \cdot \frac{q-1}{q^m-1}.$$

Werden hierin für r nach und nach alle Werthe von $r = 1$ bis $r = m$ gesetzt und die entstehenden Werthe von b addirt, so folgt

$$23) \qquad \sum_{r=1}^{r=m}(b) = a \cdot \left(\frac{q^m-\alpha}{q-\alpha} + \frac{q^m-\alpha}{q^2-\alpha} + \frac{q^m-\alpha}{q^3-\alpha} + \ldots \frac{q^m-\alpha}{q^m-\alpha}\right) \cdot \frac{q-1}{q^m-1},$$

woraus in Verbindung mit 8) der gesuchte mittlere Werth der Baurente, oder der Werth von w, hervorgeht.

Die in der Gleichung 23) in Klammern stehende Summe kann nicht in einen geschlossenen algebraischen Ausdruck zusammengefaßt werden*); aber man erkennt leicht, daß jedes Glied dieser Summe, mit alleiniger Ausnahme des letzten Gliedes, größer ist als das entsprechende Glied der im §. 5 betrachteten Summe, und zwar desto größer, je größer q′ und folglich auch α angenommen war. Man hat also

24) $$\sum_{r=1}^{r=m} (b) > a$$

und

25) $$w > \frac{a}{m}$$

und kann folgenden allgemeinen Satz aufstellen:

Der mittlere Werth der Baurente für ein gegebenes Gebäude, den die dritte Methode giebt, ist immer größer als der Quotient der Division des Baucapitals

*) Um für die Summe

$$S = \frac{1}{q-\alpha} + \frac{1}{q^2-\alpha} + \frac{1}{q^3-\alpha} + \ldots \frac{1}{q^m-\alpha}$$

eine Formel zur angenäherten Berechnung derselben zu finden, entwickle man jedes ihrer Glieder in eine nach Potenzen von α fortschreitende Reihe und addire alle diese Reihen. Man erhält so

$$S = \frac{1}{q^m}\cdot\frac{q^m-1}{q-1} + \frac{\alpha}{q^{2m}}\cdot\frac{q^{2m}-1}{q^2-1} + \frac{\alpha^2}{q^{3m}}\cdot\frac{q^{3m}-1}{q^3-1} + \ldots$$

welche Reihe für die hier in Betracht kommenden Fälle beständig convergirt und mithin zur numerischen Berechnung von S gebraucht werden kann.

Setzt man diesen Werth von S in den Ausdruck 23), so läßt sich derselbe für die numerische Rechnung noch etwas bequemer zusammenziehen, nämlich in

$$\sum_{r=1}^{r=m}(b) = a\left(1-\frac{\alpha}{q^m}\right)\left(1+\frac{\alpha}{q^m}\cdot\frac{q^{2m}-1}{q^2-1}\cdot\frac{q-1}{q^m-1}+\frac{\alpha^2}{q^{2m}}\cdot\frac{q^{3m}-1}{q^3-1}\cdot\frac{q-1}{q^m-1}+\ldots\right),$$

wo das Gesetz des Fortschreitens der eingeklammerten Reihe von selbst in die Augen springt.

durch die Bauperiode; und zwar desto größer, je höher der Zinsfuß der beim ersten Neubau nöthigen Anleihe angenommen wird.

Oder aus der Vergleichung dieses Paragraphen mit §. 5:

Die dritte Methode liefert für ein gegebenes Gebäude immer einen größeren mittleren Werth der Baurente als die zweite; und zwar wird der Unterschied desto größer, je höher in der dritten Methode der Zinsfuß der beim ersten Neubau nöthigen Anleihe angenommen wird.

Nimmt man z. B. in dem obigen Beispiele $a = 6000$ ℳ und $m = 100$ Jahre, den Zinsfuß, zu welchem die Baurente mit Zinseszinsen wächst, zu 3 Procent oder $q = 1{,}03$, und den Zinsfuß, zu welchem die beim ersten Neubau nöthige Anleihe verzinst wird, zu 4 Procent oder $q' = 1{,}04$, so wird $\alpha = 1/4$, und als mittleren Werth der Baurente für dieses Gebäude erhält man

$$w = 68{,}45 \text{ ℳ}.$$

Nimmt man in demselben Beispiele den Zinsfuß, zu welchem die Baurente mit Zinseszinsen wächst, wieder zu 3 Procent oder $q = 1{,}03$, dagegen den Zinsfuß, zu welchem die beim ersten Neubau nöthige Anleihe verzinst werden muß, zu 5 Procent oder $q' = 1{,}05$, so wird $\alpha = 2/5$, und man erhält als mittleren Werth der Baurente

$$w = 75{,}51 \text{ ℳ}.$$

Aus der Vergleichung mit den §§. 4 und 5 sieht man, daß diese mittleren Werthe beide größer ausgefallen sind als derjenige $w = 60$ ℳ, welcher unter der Voraussetzung der Gleichheit der bezeichneten beiden Zinsfüße stattfindet; dagegen erheblich kleiner als derjenige $w = 119{,}52$ ℳ, welcher eintritt,

wenn eine Verzinsung der Baurente gar nicht, und nur eine Verzinsung der Anleihe zu 4 Procent zugelassen wird.

§. 14. Die Anwendung des so eben entwickelten mittleren Werthes der Baurente, welchen die dritte Methode giebt, auf einen größeren Complex von Gebäuden, und insbesondere auf den im §. 7 erörterten Fall, gestaltet sich wie folgt:

Im §. 7 wurde der Fall angenommen, ein Complex bestehe aus m Gebäuden, von denen jedes ein Baucapital = a und eine Bauperiode = m erfordert; diese Gebäude sollen genau in solcher Reihenfolge baufällig werden, daß in jedem Jahre ein Neubau nöthig ist, und der erste bevorstehende Neubau soll derjenige sein, welcher nach einem Jahre eintreten muß. Ebendaselbst wurde ferner gezeigt, daß es zur Ermittelung der Baurente B für diesen Complex vollkommen einerlei ist, ob man ihn nach der Formel 16)

$$B = \sum_{r=1}^{r=m} (b)$$

oder nach der Formel 17)

$$B = mw$$

berechnen will, d. h. die Baurente für diesen Complex kann eben so wohl durch die Summirung der individuellen Baurenten der einzelnen Gebäude, als auch durch die Summirung der mittleren Werthe der Baurenten dieser Gebäude gefunden werden.

Wenn man hiernach den Werth der Baurente B für den vorliegenden Complex nach der dritten Methode bestimmen will, so hat man aus der Combinirung der Formeln 16) und 24), oder 17) und 25)

$$B > a.$$

Aber aus den Erörterungen des §. 8 ist a priori klar, daß

die Baurente für diesen Fall den Betrag = a haben muß, und es entsteht hier mithin wieder ein Widerspruch, ähnlich demjenigen, welcher im §. 8 für die erste Methode sich ergeben hat und welcher auf die Unzulässigkeit der betreffenden Methode für den in Rede stehenden Fall hinweist.

So z. B. hat man im vorigen Paragraphen für a = 6000 ℳ und m = 100 Jahre nach der dritten Methode gefunden

$$w = 68{,}45 \text{ ℳ}$$

für die Zinsfuße q = 1,03 und q' = 1,04; und

$$w = 75{,}51 \text{ ℳ}$$

für die Zinsfuße q = 1,03 und q' = 1,05. Mithin beträgt die Baurente für den vorliegenden Complex von Gebäuden nach der ersten Annahme

$$B = 6845 \text{ ℳ},$$

und nach der zweiten Annahme

$$B = 7551 \text{ ℳ},$$

und diese Summen überschreiten beide den wirklichen jährlichen Bedarf von 6000 ℳ, den man schon vor aller Rechnung erkennen konnte.

Der Widerspruch, welchen hiernach die dritte Methode in der Anwendung auf den vorliegenden besonderen Fall zeigt, indem sie eine Baurente über den wirklichen Bedarf liefert, läßt sich aus der Natur dieser Methode auf ähnliche Ursachen zurückführen wie es im §. 8 für die erste Methode geschehen ist. Man denke sich die Casse, in welche die Baurente B fließt, in m einzelne Cassen zerlegt, von denen jede die individuelle Baurente eines der obigen m Gebäude aufzunehmen bestimmt ist. Für die Feststellung der Werthe dieser einzelnen Baurenten gelten sodann zwar der Hauptsache nach wieder dieselben Schlüsse, welche nach der dritten Methode im §. 11 entwickelt worden

sind; aber es tritt ein Unterschied ein, sobald irgend ein erster Neubau die betreffende Casse zu einer Anleihe nöthigt. Da nämlich alle diese Cassen sich in Einer Hand befinden, so ist man nicht mehr gezwungen wegen dieser Anleihe sich nach auswärts zu wenden und daselbst sich einen Zinsfuß q' vorschreiben zu lassen, sondern man wird den Betrag dieser Anleihe sofort aus den übrigen Cassen entnehmen, welche in dem vorliegenden Falle immer dazu im Stande sind und nur eine Verzinsung zu dem niedrigeren Zinsfuße q fordern. Hier entsteht also sofort ein Widerspruch: dieselbe Summe, welche als auszuleihende Summe, der Voraussetzung nach, zu einem niedrigeren Zinsfuße q Zinsen tragen soll, wird als anzuleihende Summe mit einem höheren Zinsfuße q' in Rechnung gebracht, und dieses hat dann die natürliche Folge, daß die Rechnung für den gesammten Complex eine Baurente über den Bedarf liefert. Soll der Widerspruch aufhören, so muß, da hier jede Anleihe bei der eigenen Casse gemacht wird, der Zinsfuß q' überall auf den Werth von q herabgesetzt werden; damit aber hat man genau die zweite Methode, welche, wie schon oben gezeigt worden, für den vorliegenden Fall das allein richtige Resultat liefert.

Nun tritt allerdings der hier bezeichnete besondere Fall in der Wirklichkeit so gut wie niemals ein; aber jeder in der Wirklichkeit gegebene Fall wird ihm um so näher kommen, je größer die Anzahl von Gebäuden, welche der Complex enthält, und je größer insbesondere die Mannigfaltigkeit in den Werthen des nächsten Bautermins ist. Man kann also allgemein den Satz aussprechen:

> daß für größere Complexe von Gebäuden die dritte Methode unrichtige, nämlich zu hohe Baurenten liefert.

Aber man kann sogleich noch hinzufügen, daß die Abweichung von der Wahrheit bei der dritten Methode erheblich kleiner bleiben wird, als sie bei der ersten Methode nach §. 8 sich herausstellt, und daß sie demnach der zweiten Methode näher steht, welche für größere Baucomplexe zur Bestimmung approximativer Werthe der Baurenten als die einzige zulässige sich gezeigt hat.

§. 15. Obgleich nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen die dritte Methode, welche wir zur Berechnung der Ablösung von einzelnen Gebäuden für die einzig richtige und zulässige halten, in der Anwendung auf größere Complexe von Gebäuden sich als fehlsam ausweist, so müssen wir dennoch noch einmal von ihr Gebrauch machen, um die Berechnung der Baurenten für Complexe jeder Art, sie seien groß oder klein, zu einem vollständigen Abschluß zu bringen.

Wir haben oben gesehen (§. 7):

> daß bei einem größeren Complexe von Gebäuden die Summirung der mittleren Werthe der Baurenten der einzelnen Gebäude immer einen Näherungswerth für die Baurente des ganzen Complexes liefert;

und ziehen ferner aus §. 8 den Schluß:

> daß bei einem größeren Complexe von Gebäuden die Berechnung der mittleren Werthe der Baurenten der einzelnen Gebäude, um angenähert richtig zu sein, nur nach der zweiten Methode geschehen darf.

Wenn demnach ein abzulösender Complex von Gebäuden gegeben vorliegt, so werden wir die Rechnung immer damit beginnen, daß wir für jedes der Gebäude nach der zweiten Methode den mittleren Werth der Baurente berechnen, was

nach §. 5 sehr einfach durch die Formel $w = \frac{a}{m}$, d. i. durch Division des Baucapitals durch die Bauperiode geschieht. Die Summe der also gefundenen mittleren Werthe der Baurenten der einzelnen Gebäude wird um so näher die Baurente des ganzen Complexes darstellen, je mehr diesem Complexe der im §. 7 näher definirte Charakter eines „großen" Complexes zukommt, und man wird deshalb diese Summe für jeden gegebenen größeren Complex immer schon wie einen Näherungswerth der gesuchten Baurente gelten lassen, bei dem man sich zumal für eine oberflächliche Untersuchung, wo nur sogenannte Ueberschlagszahlen in Frage kommen, vollkommen beruhigen kann.

Um nun aber dem wahren Werthe der Baurente eines gegebenen Complexes, dieser sei groß oder klein, noch näher zu kommen, verfahren wir wie folgt.

I. Wir berechnen die individuellen Baurenten der einzelnen Gebäude *nach der zweiten Methode*, indem wir zur Verzinsung den Zinsfuß der Sparcassen (d. i. etwa 3 Procent) zum Grunde legen, und vereinigen alle diese Baurenten in eine Summe. — Diese Rechnung setzt vermöge des vorigen Paragraphen voraus, daß alle zu den ersten Neubauten der einzelnen Gebäude erforderlichen Anleihen *aus der eigenen Casse* entnommen werden.

II. Wir berechnen die individuellen Baurenten der einzelnen Gebäude *nach der dritten Methode*, indem wir zur Verzinsung der Baurenten den Zinsfuß der Sparcassen, wie vorhin, und zur Verzinsung der Anleihen die obere Grenze des landesüblichen Zinsfußes (d. i. 4 oder 5 Procent) zum Grunde legen, und vereinigen alle diese Baurenten in eine

Summe. — Diese Rechnung setzt voraus, daß alle zu den ersten Neubauten der einzelnen Gebäude erforderlichen Anleihen *von auswärts* entnommen werden.

Nun wird in der Wirklichkeit die Sache in der Regel so liegen, daß die zu den ersten Neubauten der einzelnen Gebäude erforderlichen Anleihen weder sämmtlich aus der eigenen Casse entnommen werden können, noch sämmtlich von auswärts entnommen werden müssen. Vielmehr wird, wenn auch für einzelne Neubauten die Casse wirklich den nöthigen Bedarf vollständig darbieten sollte, für andere Neubauten dagegen die Casse nur einen Theil der erforderlichen Bausumme zu decken im Stande sein, der andere Theil derselben also durch eine Anleihe von auswärts entnommen werden müssen. Daraus aber folgt, daß in den Fällen, welche die Wirklichkeit darbietet, die Summe I. die Baurente des Complexes zu klein, die Summe II. aber diese Baurente zu groß liefert; oder man kann den allgemeinen Satz aussprechen:

> daß der wahre Werth der Baurente eines gegebenen Baucomplexes, dieser sei groß oder klein, immer zwischen den beiden aus I. und II. gefundenen Summen enthalten sein wird und niemals diese Grenzen überschreiten kann.

Man kann überdies bemerken, daß der wahre Werth der Baurente im Allgemeinen der Summe I. desto näher rücken wird, je größer der Complex ist; dagegen der Summe II. desto näher, je kleiner der Complex ist. Dies bestätigt sich auch durch die Betrachtung der Extreme. Denn denkt man sich den Complex unendlich groß, so wird er genau den Bedingungen des §. 7 Genüge leisten, und mithin wird für ihn die Summe I. genau die richtige Baurente liefern. Wenn dagegen der

Complex sich auf ein einzelnes Gebäude reducirt, so resultirt für ihn aus II. genau die richtige Baurente.

§. 16. Durch das Bisherige haben wir den wahren Werth der Baurente eines abzulösenden Complexes von Gebäuden allerdings noch nicht selbst gefunden, sondern nur erst zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, zwischen denen er zuverlässig enthalten sein muß; aber wir glauben, daß hiermit den Bedürfnissen der Praxis schon vollständig ein Genüge geschehen ist. Jede Ablösung einer Bauverpflichtung kommt doch schließlich auf einen Vergleich zwischen zwei Parteien hinaus; und da die obigen Grenzen einander schon ziemlich nahe liegen, so wird sich zwischen ihnen, insbesondere mit Rücksicht auf die Schlußbemerkung des vorigen Paragraphen, sehr leicht eine abgerundete Summe ausmitteln lassen, welche als Ablösungsrente von den beiden Parteien resp. zugestanden und angenommen werden wird.

Indessen kann es vielleicht unter Umständen wünschenswerth erscheinen, daß die Baurente für einen abzulösenden Complex von Gebäuden mit vollkommener Schärfe bekannt werde, und wir wollen deshalb zum wenigsten den Weg noch andeuten, auf welchem man dahin gelangen kann. Wir denken uns zu dem Ende einen Complex aus n Gebäuden gegeben, für welche die Baucapitale resp. betragen

$$a,\ a',\ a'',\ a'''\ \text{ꝛc.},$$

die Bauperioden resp.

$$m,\ m',\ m'',\ m'''\ \text{ꝛc.},$$

und endlich die nächsten Bautermine resp.

$$r,\ r',\ r'',\ r'''\ \text{ꝛc.}$$

Wir verstehen ferner unter der Bauperiode des Complexes diejenige Anzahl von Jahren, nach deren Ablauf die

gesammte Reihe der Neubauten in derselben Ordnung und in denselben Zeitintervallen wiederkehren wird, und bezeichnen dieselbe mit M. Offenbar ist M nichts anderes als der kleinste gemeinschaftliche Dividendus der Zahlen m, m', m'' ꝛc., und in der also bestimmten Bauperiode des Complexes wird sich $\frac{M}{m}$ mal der Neubau des ersten Gebäudes, $\frac{M}{m'}$ mal der Neubau des zweiten Gebäudes zutragen u. s. w. Wenn also N die Anzahl aller in eine Bauperiode des Complexes fallenden Neubauten bezeichnet, so hat man

$$N = \frac{M}{m} + \frac{M}{m'} + \frac{M}{m''} + \ldots,$$

aus welcher Gleichung man zugleich erkennt, daß immer

$$N \geqq n$$

sein wird.

Nun sei B der aus dem Obigen schon angenähert bekannte Betrag der Baurente des gegebenen Complexes. Wir verfolgen diesen Werth von B mit Hülfe der Rechnung durch die ganze Mjährige Bauperiode, indem wir die jährlich einlaufenden Rentenbeträge mit Zinseszinsen zu dem Zinsfuße q anwachsen lassen, aus der dadurch gebildeten Casse bei jedem Neubau die zu diesem erforderliche Bausumme entnehmen, oder, falls dies nicht möglich ist, das Fehlende durch eine Anleihe von auswärts zu dem Zinsfuße q' ergänzen, und die Zinsen für diese Anleihe fernerhin aus der Casse decken. Wenn wir so bis zum Schlusse der Mjährigen Bauperiode gelangt sind, so kommt Alles darauf an, in welchem Zustande sich in diesem Zeitpunkte die Casse befinden muß. Wenn $q' = q$ gesetzt werden darf, also insbesondere auch, wenn während der Mjährigen Periode eine Anleihe von auswärts überall nicht

nöthig gewesen ist, so muß die Bilanz der Casse genau den Werth Null ergeben. Im entgegengesetzten Falle aber müssen beim Eintritt in die zweite Periode die Activa der Casse die Passiva derselben um eine gewisse mit der Differenz $q' - q$ zugleich steigende oder fallende Größe übertreffen, so bemessen, daß die Casse auch noch fernerhin genau die Zinsen aller aus der ersten Periode stammenden Anleihen bis zu dem Augenblicke zu zahlen im Stande ist, wo diese Anleihen in der zweiten Periode sich wiederholen werden. Oder mit andern Worten, die Bilanz muß den Werth Null ergeben, nachdem man zuvor jede Anleihe, welche z. B. im $r$ten Jahre der Mjährigen Periode gemacht worden ist, mit dem Factor

$$1 + (q' - q) \cdot \frac{q^r - 1}{q^r (q - 1)}$$

multiplicirt hat. Auf diese Weise bietet also die Bilanz der Casse am Schlusse der ersten Periode ein Mittel dar, um den Werth von B, welcher der Rechnung zum Grunde gelegt war, zu prüfen und nöthigenfalls zu berichtigen.

Wir versagen uns die weitere Entwickelung und Nachweisung der Formeln, welche dem hier angedeuteten Rechnungsgange entsprechen, indem wir, wie schon gesagt, kaum glauben, daß die Praxis jemals derselben bedürfen wird.

Zur Uebersicht und Vergleichung möge das in diesen Untersuchungen nach den verschiedenen Methoden berechnete Zahlenbeispiel noch einmal, und zwar vervollständigt, hier zusammengestellt werden.

Ablösung eines Gebäudes,

für welches das Baucapital $a = 6000$ ℳ und die Bauperiode $m = 100$ Jahre beträgt,

durch Capital oder Rente.

	Nach der ersten Methode. $q = 1{,}04$		Nach der zweiten Methode. $q = 1{,}04$		$q = 1{,}03$		Nach der dritten Methode. $q = 1{,}03$ $q' = q'' = 1{,}04$		$q = 1{,}03$ $q' = 1{,}05, q'' = 1{,}01$		$q = 1{,}02$ $q' = 1{,}06, q'' = 1{,}01$	
	Capital ℳ	Rente ℳ	Capital ℳ	Rente ℳ	Capital ℳ	Rente ℳ	Capital ℳ	Rente ℳ	Capital ℳ	Rente ℳ	Capital ℳ	Rente ℳ
Nächster Bauterminin.	1500,0	60,00	121,2	4,85	9,88		247,0	9,88	247,0	9,88	480,4	19,22
$r = 100$ Jahre . .	1630,4	65,21	179,4	7,17	329,3	9,88	333,3	13,33	324,3	13,37	508,4	23,06
90 „ . . .	1785,7	71,42	245,5	10,02	442,6	13,27	450,5	18,03	453,8	18,15	750,8	30,03
80 „ . . .	1973,6	78,94	393,1	15,72	594,8	17,84	611,0	24,44	618,3	24,73	948,2	37,93
70 „ . . .	2205,8	88,23	581,8	23,27	797,4	23,98	830,3	33,21	846,3	33,85	1208,5	48,33
60 „ . . .	2500,0	100,00	861,3	34,45	1443,3	32,22	1135,3	45,33	1166,5	46,66	1560,6	62,43
50 „ . . .	2884,6	115,38	1275,0	51,00	1940,1	43,31	1555,5	62,22	1624,0	64,96	2050,2	82,01
40 „ . . .	3409,0	136,36	1887,2	75,49	2607,5	58,22	2151,8	86,07	2292,5	91,71	2760,6	110,43
30 „ . . .	4166,7	166,66	2793,5	111,74	3504,4	105,72	2990,8	120,43	3305,5	132,22	3857,2	154,29
20 „ . . .	5307,1	214,28	4135,2	165,40	4709,0	141,39	4238,0	171,32	4924,3	196,97	5721,7	228,87
10 „ . . .	7600,0	300,00	6121,2	244,85	6329,3	189,88	6247,0	249,88	7141,0	309,88	9480,5	379,22
0 „ . . .												
Mittlerer Werth der Baurente		119,52		60,00		60,00		68,45		75,51		94,24

Hofbuchdruckerei der Gebr. Jänecke in Hannover.

23638

END OF
TITLE